



宋滔, 王绪本. 2014. 点源二维电场正演的一组新的波数. 地球物理学进展, 29(1): 0166-0171, doi: 10. 6038/pg20140122.

SONG Tao, WANG Xu-ben. 2014. A set of new wave number for point source and 2-D electric field problems. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 29(1): 0166-0171, doi: 10. 6038/pg20140122.

点源二维电场正演的一组新的波数

A set of new wave number for point source and 2-D electric field problems

宋滔¹, 王绪本²

SONG Tao¹, WANG Xu-ben²

1. 中国科学院地球化学研究所, 矿床地球化学国家重点实验室, 贵阳 550002

2. 成都理工大学 地球物理学院, 成都 610059

1. State Key Laboratory of Ore Deposit Geochemistry, Institute of Geochemistry Chinese Academy of Sciences, Guiyang 550002, China

2. College of Geophysics, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China

摘要 首先使用最优化方法计算在点源二维傅氏反变换问题中使用的波数, 得到了两组波数, 分别包含 7 个和 9 个。在极距范围为 0.1 m 到 1000 m 时, 这两组波数傅氏反变换的误差在 0.1% 以内。然后使用有限单元法, 结合文章中给出的波数, 分别模拟了均匀大地、K 型和 H 型地电结构的测深曲线, 结果与解析解对比, 相对误差在 3% 以内, 而使用前人学者提出的波数在极距大于 200 m 时出现与解析解分离的情况。最后使用不同波数计算两个二维模型, 与三维有限元模拟结果对比, 验证了该组波数的正确性。同时发现, 使用 7 个波数与 9 个波数计算精度相似, 建议使用 7 个波数进行模拟。

关键词 波数; 电场; 最优化方法; 有限元; 大极距

中图分类号 P318, P319

文献标识码 A

doi: 10. 6038/pg20140122

Abstract First, discuss the problem of the selection of wave number in fourier inverse transformation for the point source and two dimensional electric field using optimization method, and calculate 7 and 9 wave numbers under the condition of polar distance ranging from 0.1 to 1000 m. And the error of this wave number is less than 0.1% in fourier inverse transformation. Then use the finite element method analog uniform earth, K-type and H-type geoelectric section. Comparing the analytical solution with the one by using the wave number given in the article, the relative error is less than 3%, and with the one by using the wave number given by scholars before, the relative error is 30% at most. The results suggest that the latter solution began to deviate from the standard one (the analytical solution) when the polar distance above 200 m. Finally, using 3D FEM modeling 2D models as references result, the curves and profile maps indicate that the new wave number have a better accuracy. In the meanwhile, the accuracy of the result of 7 wave numbers and the result of 9 wave numbers are almost the same, so while modeling, the 7 wave numbers is recommended.

Keywords wave number; electric field; optimization method; FEM; big polar distance

0 引言

在模拟点源二维电场时, 为了减少计算量, 避免进行三维模拟, 常用的方法是用傅氏变换, 在波数域中进行计算, 即将解三维问题变为解多个二维问题, 然后再进行傅氏反变换, 获得空间中的电位。波数的选择很大程度上决定了计算的精度, 同时波数的个数与计算时间是成正比的, 一般来说波数越长, 计算的精度越高, 计算时间越长。徐世浙采用最优化方法(徐世浙, 1988), 选取了 5 个波数, 当模拟深度在 100 m 以内时达到了很好的精度, 但是在实际勘探中, 如果使用大极距大功率的电阻率法或者激电法, 该组波数模拟精度不够, 结果误差较大。韩思旭使用系数校正的方法(韩思旭等, 2010), 采用徐世浙提出的 5 点波数, 在数值模拟之后, 对

结果进行校正, 在大极距条件下仍取得较好效果, 但是对于不同的背景电阻率以及不同的构造, 可能需要不同的校正系数, 难以统一。王飞燕详细地讨论了波数的选取(王飞燕, 2009), 并分别对垂直接触面模型、均匀半空间赋存单个异常体和均匀半空间赋存多个异常体三种情况提出了三组波数, 取得了较好效果, 同样该组波数没有考虑在大极距条件下的应用, 而且三组波数难以统一, 不利于反演的实现。

本文采用最优化方法, 在极距为 0.1 m 到 1000 m 的范围, 计算了两组波数, 分别包含 7 个和 9 个, 傅氏反变换的误差均在 0.1% 以内, 通过模拟分析, 该组波数精度较好。

1 最优化方法

假设地下构造为二维构造, $u(x, y, z)$ 为三维空间中的电

收稿日期 2013-05-10; 修回日期 2013-09-09.

投稿网址 <http://www.progeophys.cn>

基金项目 本研究得到 973 项目“华南大面积低温成矿作用”中“大型-超大型低温矿床成矿规律与找矿预测”课题(编号: 2014CB440905)和矿床地球化学国家重点实验室“十二五”项目群(编号: SKLODG-ZY125-01)联合资助。

作者简介 宋滔, 男, 博士研究生, 主要从事地电场数值模拟及反演成像方法研究。(E-mail: shaman_king7@163.com)

位, $U(x, y, k)$ 是沿 z (走向) 方向进行傅氏变换之后在波数域中的电位。在空间中, 取点源处为坐标原点, 由于 z 是走向, 根据对称性有 $u(x, y, z) = u(x, y, -z)$, 所以采用余弦形式, 傅氏变换对为

$$U(x, y, k) = \int_0^\infty u(x, y, z) \cos kz dz, u(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(x, y, k) \cos kz dk, \quad (1)$$

选择主剖面为观测剖面, 即 $z=0$, 将均匀半空间的解析解代入(1), 并进行简单的运算, 得到 $1 = \frac{2}{\pi} r \int_0^\infty K_0(kr) dk$,

然后离散化得到 $1 \approx \sum r K_0(k_j r) \cdot g_j, j = 1 \dots n, r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

其中 x, y 为观察点的坐标, r 为观察点到坐标原点的距离, 单位为 m, K_0 为第二类零阶修正贝塞尔函数。在研究范围内选取一系列的 r_i (m 个) 便得到方程组

$$a\mathbf{g} = \mathbf{V},$$

其中 $a_{ij} = r_i K_0(r_i k_j), \mathbf{g} = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n)^T, \mathbf{V} = (v_1 \ \dots \ v_i \ \dots \ v_m)^T, v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot g_j (j = 1 \dots n, i =$

$1 \dots m)$ 。

给定一组 k 值, 在使 $\phi = (\mathbf{I} - \mathbf{V})^T (\mathbf{I} - \mathbf{V})$ 取得极小的情况可以确定一组 \mathbf{g} , 其中 $\mathbf{I} = (1 \ \dots \ 1)^T$ 。

最优化方法求取波数 $k - \mathbf{g}$ 的过程为

(1) 选取一组 r , 给定一组初值 k (同时也确定了波数的个数);

(2) 计算 \mathbf{V} , 根据 ϕ 的极小, 由 k 求取对应的 \mathbf{g} ;

(3) 使用这一组 $k - \mathbf{g}$ 计算相对误差, 如果精度没有达到要求则转向④, 如果误差在阈值以内或者迭代次数达到设定的最大值则转向⑥;

(4) 求 \mathbf{V} 对于 k 的偏导数矩阵;

(5) 根据最小二乘原理, 计算得到 k 的修改量 Δk , 将 Δk 加入 k 中, 然后执行②;

(6) 保存计算得到的 $k - \mathbf{g}$ 退出循环。

设置 r 的范围为 $0.1 \sim 1000 \text{ m}$, 设置阈值误差为 0.1% , 最大迭代次数为 100 次, 计算了两组波数, 分别包含 7 个波数和 9 个波数, 误差均在 0.1% 以内。表 1、表 2 给出了这两组波数:

表 1 7 个波数

Table 1 7 wave numbers, k and g

K	0.000893	0.007744	0.028639	0.095209	0.337647	1.338806	5.766963
G	0.001869	0.007411	0.021980	0.073982	0.283508	1.210810	5.670225

表 2 9 个波数

Table 2 9 wave numbers, k and g

K	0.000704	0.005832	0.050142	0.128669	0.339511	0.018993	2.725006	0.939284	8.418160
G	0.001465	0.005285	0.030052	0.077935	0.214409	0.012413	1.879314	0.624406	6.537501

2 点源二维有限单元法模拟

地下电性结构为二维情况, 沿走向变换到波数域中, 总场法对应的变分问题为(徐世浙, 1994)

$$\begin{cases} F(U) = \int_{\Omega} \left[\frac{\sigma}{2} (\nabla U)^2 + \frac{1}{2} k^2 U^2 - I \delta(A) U \right] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_n} \sigma \frac{k K_1(kr)}{K_0(kr)} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) U^2 d\Gamma \\ \delta F(U) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

其中 k 为波数, σ 为电导率(单位为西门子 $S \cdot m^{-1}, \sigma = \frac{1}{\rho}$), U 为波数域中的电位, I 为供电电流, $\delta(A)$ 表示供电点的位置 (A 点), K_0, K_1 分别为第二类零阶修正贝塞尔函数和第一类一阶修正贝塞尔函数, $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ 即供电点 A 到边界点的矢径 \mathbf{r} 与该边界点的外法向 \mathbf{n} 之间夹角的余弦值。

使用矩形内剖分两个三角网格的方式, 剖分区域, 这样既方便形成地形, 同时使得程序的编制变得简单, 如图 1 所示:

然后进行单元分析, 得到刚度矩阵, 也即方程组为

$$K\mathbf{u} = \mathbf{P},$$

解该方程组, 便可求得各个节点在波数域 k 中的电位值, 最后进行傅氏反变换便可得到空间中的电位值, 傅氏反变换的计算公式为

$$u(m) = \sum_{i=1}^n g_i U(m, k_i),$$

其中 m 代表点的位置, k_i, g_i 即为上节中计算得到的波数。得到电位 u 后便可以根据具体模拟的装置, 计算视电阻率。

3 算例分析

为验证本文中的波数的有效性, 首先在均匀大地与水平层状条件下, 对比了文中的波数与前人提出的波数以及解析解, 然后使用三维有限元模拟二维结构, 对比使用本文波数与前人波数的二维模拟结果。

以下模拟计算使用的网格为: 横向稀疏网格左右两边均为 12 个, 网格大小为点距乘以系数, 网格系数分别为 $1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 16, 32, 64$, 观测区域网格为测点数, 网格大小即为点距, 垂向网格固定为 35 个, 网格系数为 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 16, 16, 16, 32, 32, 64, 64$ 。

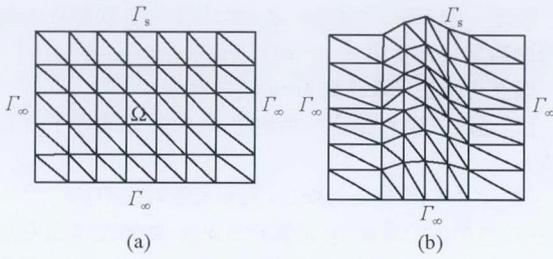


图1 区域有限元网格剖分

(a) 水平地形区域剖分; (b) 起伏地形区域剖分.

Fig. 1 Division of region with FEM grids

(a) Division of grid when flat-ground;

(b) Division of grid when topography.

3.1 均匀半空间

均匀半空间,电阻率为 $\rho=100 \Omega\text{m}$,采用对称四极测深,最大极距 1000 m.采用上节中的有限元模拟方法,使用本文计算的 7 个以及 9 个波数与王飞燕计算的波数以及徐世浙计算的 5 个波数,以及解析解进行对比,如图 2 所示:

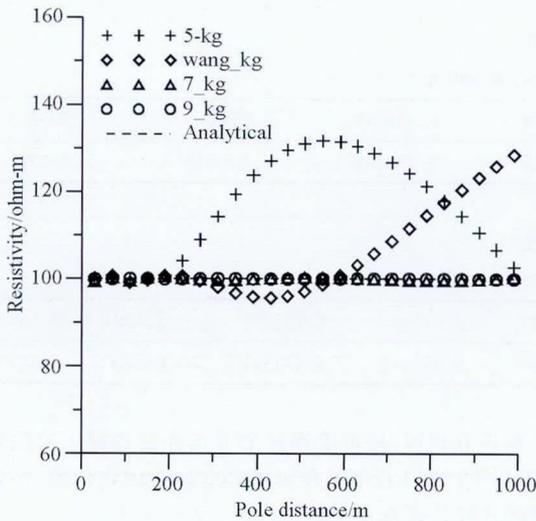


图2 均匀半空间结果对比

Fig. 2 Homogenous half-space results contrast

图中 analytical 代表解析解结果,5_kg 代表使用徐世浙 5 点波数的结果,wang_kg 为使用王飞燕计算的波数的模拟结果,7_kg 与 9_kg 分别为使用本文计算的 7 个与 9 个波数的模拟结果(以下图示相同).

如图可知,当极距大于 200 m 时,使用前人学者的波数其数值解与解析解误差较大,最大相对误差可达到 30%,而使用本文计算的 7 个波数以及 9 个波数,极距到了 1000 m 时,仍然与解析解吻合较好.在均匀半空间中,使用该组波数,解析解与数值解均方误差在 3% 以内,同时 7 个波数与 9 个波数的模拟结果一致,它们之间的均方误差在 1% 以内.

3.2 K 型地电模型

K 型地电模型,如图 3 所示,其中,第一层电阻率 $\rho_1 = 100 \Omega\text{m}$,层厚度 $H_1 = 30 \text{ m}$,第二层电阻率 $\rho_2 = 1000 \Omega\text{m}$,层

厚度 $H_2 = 10 \text{ m}$,基底电阻率 $\rho_3 = 50 \Omega\text{m}$,采用对称四极测深,模拟结果如图 4 所示:

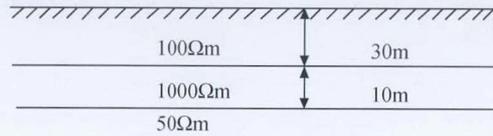


图3 K 型地电模型示意

Fig. 3 schematic of K-type geoelectric model

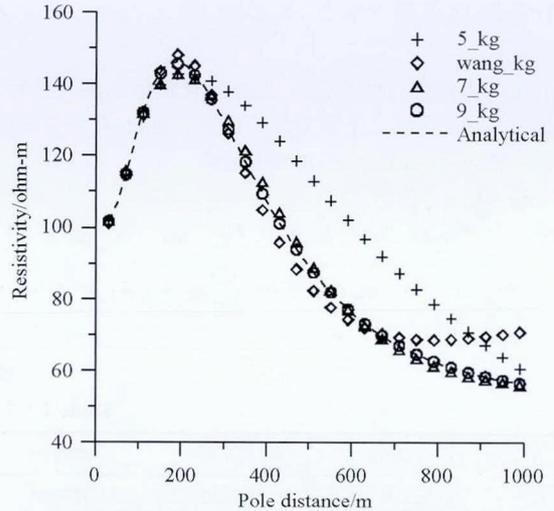


图4 K 型地电模型模拟结果对比

Fig. 4 K-type geoelectric model results contrast

如图所示,使用本文计算的两组波数均与解析解吻合较好,相对误差在 3% 以内,从图中可以看出使用前人学者计算的波数,虽然曲线整体形态一致,但是误差较大.

3.3 H 型地电模型

H 型地电模型,如图 5 所示,其中,第一层电阻率 $\rho_1 = 1000 \Omega\text{m}$,层厚度 $H_1 = 30 \text{ m}$,第二层电阻率 $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$,层厚度 $H_2 = 10 \text{ m}$,基底电阻率 $\rho_3 = 2000 \Omega\text{m}$,采用对称四极测深,模拟结果如图 6 所示:

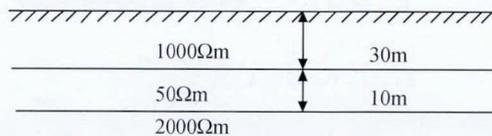


图5 H 型地电模型示意

Fig. 5 schematic of H-type geoelectric model

如图所示,使用本文计算的波数与解析解吻合较好,同时发现使用 7 个波数与 9 个波数得到的结果基本一致,与解析解对比均能够控制误差在 3% 以内,所以建议采用 7 个波数进行模拟.

3.4 含单个异常体二维模型

背景电阻率 $\rho=100 \Omega\text{m}$,包含一个低阻异常体,模型具体参数如图 7 所示:

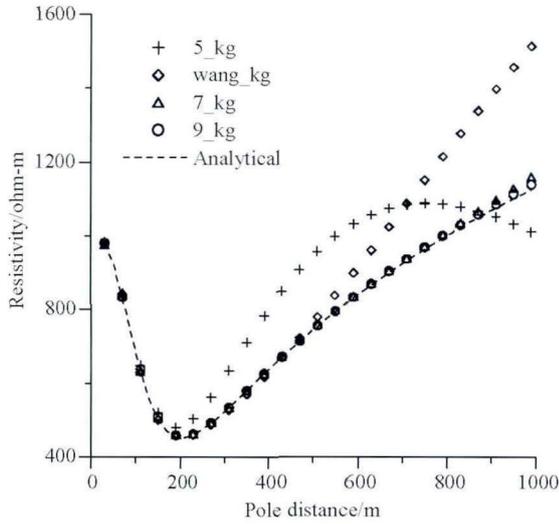


图 6 H型地电模型模拟结果对比
Fig. 6 H-type geoelectric model results contrast

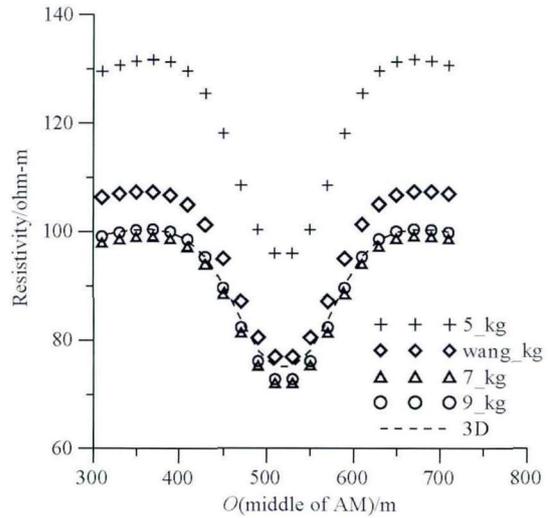


图 8 极距 600 m 的视电阻率曲线图
Fig. 8 Apparent resistivity curves when polar distance is 600 m

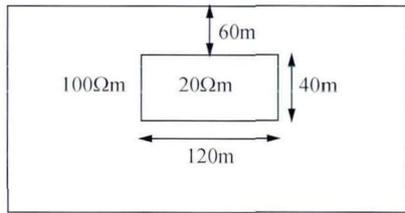


图 7 含低阻异常体模型示意
Fig. 7 schematic of model with a low resistivity abnormal body

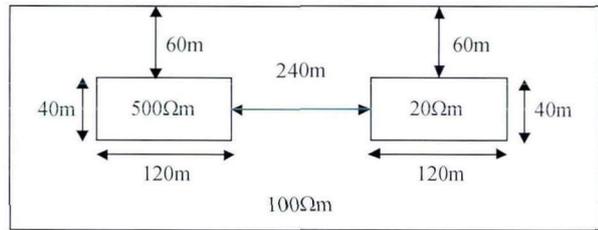


图 10 含两个异常体模型示意
Fig. 10 schematic of model with two abnormal bodies

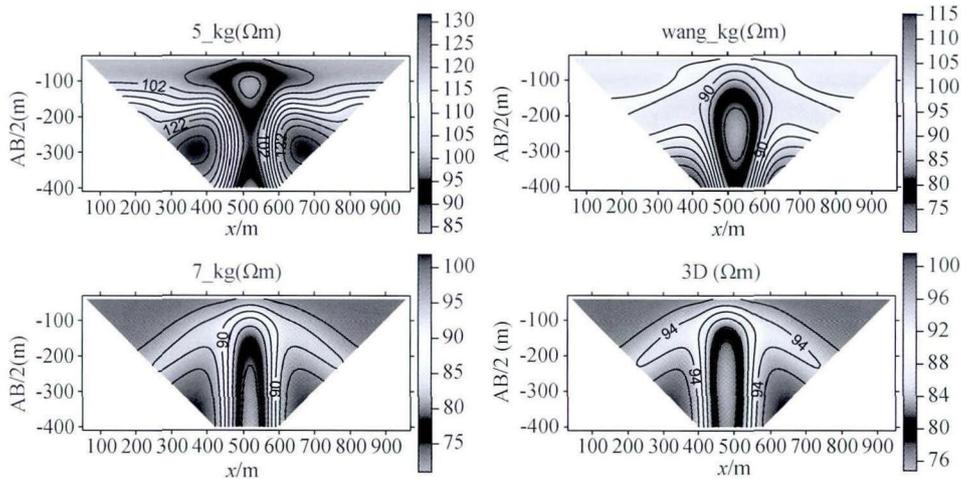


图 9 含异常体模型模拟结果剖面图
Fig. 9 The analog results profile map of model with a low resistivity abnormal body

采用对称四极装置,极距为 20 m,50 个电极,最大电极距为 800 m,取模拟结果中,极距为 600 m 的测点,视电阻率曲线图如图 8 所示,视电阻率剖面图如图 9 所示:

图 8,图 9 中 3D 为使用有限单元法六面体剖分三维模拟的结果(模拟二维模型),与使用不同波数的二维模拟结果进行对比.通过观察图 8,可以发现使用文中计算的波数与

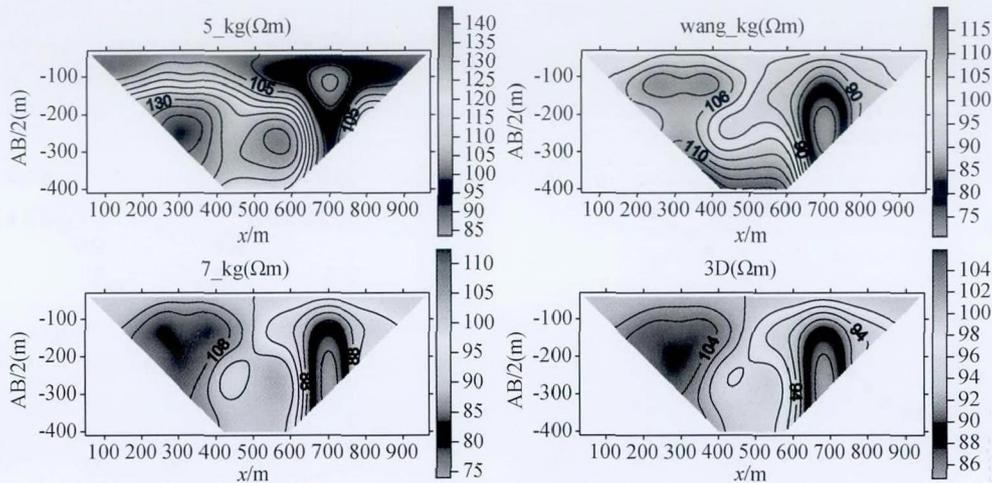


图 12 含异常体模型模拟结果剖面图

Fig. 12 The analog results profile maps of model with two abnormal bodies

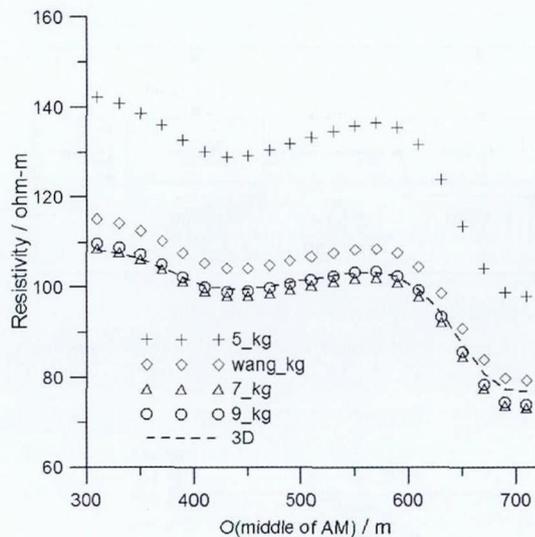


图 11 极距 600 m 的视电阻率曲线图

Fig. 11 Apparent resistivity curves when polar distance is 600 m

三维模拟结果吻合较好,而前人学者提出的波数均出现一定的偏离.剖面图(图 9)中,本文的波数与三维模拟结果在形态和数值上均吻合(使用 9 个波数得到的结果与 7 个波数是一致的,在此仅给出 7 个波数模拟的结果,下同).

3.5 含两个异常体二维模型

背景电阻率 $\rho=100 \Omega\text{m}$, 包含两个异常体,模型具体参数如图 10 所示:

采用对称四极装置,极距为 20 m,一共 50 个电极,最大电极距为 800 m,取模拟结果中,极距为 600 m 的测点,视电阻率曲线图如图 11 所示,视电阻率剖面图如图 12 所示:

从图 12 可以看出,在整体形态上,使用文中的波数,与三维模拟结果一致,而使用前人学者计算的波数,视电阻率在深部误差较大.

4 结论

本文通过最优化方法,选取点源二维电场傅氏反变换中的波数以适应极距达到 1000 m. 通过计算得到了两组波数,分别包含 7 个波数和 9 个波数. 采用文中波数,模拟层状大地,两组波数的精度均较高,与解析解的相对误差在 3% 以内,而前人学者提出的波数在极距大于 200 m 时与解析解对比,误差较大. 同时得出 7 个波数得到的结果与 9 个波数得到的结果基本一致,所以实际模拟中建议采用 7 个波数. 最后本文通过模拟二维模型与三维模拟结果对比,再次验证文中波数的正确性.

References

- Cheng Z P. 2007. Electrical Prospecting Tutorial (in Chinese) [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press.
- Duan B C, Zhu Y S. 1994. The application of of optimized number to direct calculation of point source Two-Dimensional finite element [J]. Geophysical and Geochemical Exploration (in Chinese), 18(3): 186-191.
- Han S X, Ou D X, Li Y. 2010. Modified two-dimensional finite element simulation of point source direct current sounding [J]. Journal of Guilin University of Technology (in Chinese), 30 (4): 518-521.
- Huang J G, Ruan B Y, Bao G S. 2002. FEM under quantic-boundary condition for modeling resistivity on 3-D geoelectric section [J]. Journal of Guilin University of Technology (in Chinese), 22(1): 11-14.
- Huang J G; Wang J L; Ruan B Y. 2007. Anomalous of large polar distance dipole-dipole resistivity sounding in tunnel [J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 22(6): 1935-1941.
- Liu D G, Fei J G, Yu Y J, et al. 1980. FORTRAN Algorithm Collection [Volume 1] (in Chinese) [M]. Beijing: National Defense Industry Press.
- Liu Y, Wang X B. 2012. The FEM for modeling 2-D MT with continuous variation of electric parameters within each block [J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), (6): 2079-2086, doi: 10. 6038/j. issn. 0001-5733. 2012. 06. 029.
- Lv Y Z, Ruan B Y. 2006. 3-D resistivity FEM numerical modeling

- based on tetrahedral element division under complicated terrain [J]. *Progress in Geophysics (in Chinese)*, 21(4): 1302-1308, doi: 10.3969/j.issn.1004-2903.2006.04.040.
- Qiang J K, Luo Y Z. 2007. The resistivity FEM numerical modeling on 3-D undulating topography [J]. *Chinese J. Geophys. (in Chinese)*, 50(5): 1606-1613.
- Qiang J K, Luo Y Z, Xiong B. 2005. The study of 3 D IP anomaly by fixed point source sounding. *Progress in Geophysics (in Chinese)*, 20(4): 1176-1183, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2007.05.038.
- Ruan B Y. 2001. 2-D electrical modeling due to a current point by FEM with variation of conductivity within each triangular element [J]. *Guangxi Sciences (in Chinese)*, 8(1): 1-3.
- Ruan B Y, Xiong B. 2002. A finite element modeling of three-dimensional resistivity sounding with continuous conductivity [J]. *Chinese J. Geophys. (in Chinese)*, 45(01): 131-138, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2002.01.016.
- Song T. 2013. 2. 5-D and 3-D DC resistivity numerical modeling using finite element method (in Chinese) [D]. Chengdu: Chengdu University of Technology.
- Song T, Wang X B. 2012. The Wave Number of 2D Resistivity Sounding in the Condition of Large Polar Distance [A] (in Chinese). \ The Chinese Geophysics 2012 [C].
- Wang F Y. 2009. 2. 5-D DC resistivity modeling by the adaptive finite-element method with unstructured triangulation [D] (in Chinese). Changsha: Central South University.
- Wu X P. 2003. A 3-D finite element resistivity forward modeling using conjugate gradient algorithm. *Chinese J. Geophys. (in Chinese)*, 46(3): 428-432, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2003.03.023
- Wu X P, Xu G M, Li S C. 1998. The calculation of three-dimensional geoelectric field of point source by incomplete cholesky conjugate gradient method [J]. *Chinese J. Geophys. (in Chinese)*, 41(6): 848-855.
- Xiong B, Ruan B Y. 2002. A numerical simulation of 2-d geoelectric section with biquadratic change of potential for resistivity sounding by the finite element method [J]. *Chinese J. Geophys. (in Chinese)*, 45(02): 285-295, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2002.02.015
- Xiong B, Ruan B Y, Luo Y Z. 2003. 3-D numerical simulation study of DC resistivity anomaly under complicated terrain [J]. *Geology and Prospecting (in Chinese)*, 39(4): 60-64.
- Xu S Z. 1988. Selection of wave number k in Fourier inverse transformation for point source and 2-D electric field problems [J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration (in Chinese)*, 10(3): 235-239.
- Xu S Z. 1994. FEM in Geophysics [M] (in Chinese). Beijing: Science Press.
- Zhou X X, Zhong B S. 1986. Numerical Modeling for Electrical Exploration [M] (in Chinese). Chengdu: Sichuan Science and Technology Press.
- 段本春, 朱永盛. 1994. 最优波数在点源二维有限元正演计算中的应用 [J]. *物探与化探*, 18(3): 186-191.
- 韩思旭, 欧东新, 李勇. 2010. 修正的点源二维直流电测深有限元模拟 [J]. *桂林理工大学学报*, 30(4): 518-521.
- 黄俊革, 阮百尧, 鲍光淑. 2002. 齐次边界条件下三维地电断面电阻率有限元数值模拟法 [J]. *桂林工学院学报*, 22(1): 11-14.
- 黄俊革, 王家林, 阮百尧. 2007. 坑道大极距偶极电阻率测深异常特征 [J]. *地球物理学进展*, 22(6): 1935-1941.
- 刘德贵, 费景高, 于泳江, 等. 1980. FORTRAN 算法汇编 (第一分册) [M]. 北京: 国防工业出版社.
- 刘云, 王绪本. 2012. 电性参数分块连续变化二维 MT 有限元数值模拟 [J]. *地球物理学报*, (6): 2079-2086, doi: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.06.029.
- 吕玉增, 阮百尧. 2006. 复杂地形条件下四面体剖分电阻率三维有限元数值模拟 [J]. *地球物理学进展*, 21(4): 1302-1308, doi: 10.3969/j.issn.1004-2903.2006.04.040.
- 强建科, 罗延钟. 2007. 三维地形直流电阻率有限元法模拟 [J]. *地球物理学报*, 50(5): 1606-1613.
- 强建科, 罗延钟, 熊彬. 2005. 固定点源测深深电异常研究 [J]. *地球物理学进展*, 20(4): 1176-1183, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2007.05.038.
- 阮百尧. 2001. 三角单元部分电导率分块连续变化点源二维电场有限元数值模拟 [J]. *广西科学*, 8(1): 1-3.
- 阮百尧, 熊彬. 2002. 电导率连续变化的三维电阻率测深有限元模拟 [J]. *地球物理学报*, 45(01): 131-138, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2002.01.016.
- 宋滔. 2013. 2.5 维、三维直流电阻率法有限元数值模拟 [D]. 成都: 成都理工大学.
- 宋滔, 王绪本. 2012. 大极距条件下二维电阻率测深的波数 [A]. *中国地球物理 2012* [C].
- 王飞燕. 2009. 基于非结构化网格的 2.5-D 直流电阻率法自适应有限元数值模拟 [D]. 长沙: 中南大学.
- 吴小平. 2003. 利用共轭梯度算法的电阻率三维有限元正演 [J]. *地球物理学报*, 46(3): 428-432, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2003.03.023
- 吴小平, 徐果明, 李时灿. 1998. 利用不完全 Cholesky 共轭梯度法求解点源三维地电场 [J]. *地球物理学报*, 41(6): 848-855.
- 熊彬, 阮百尧. 2002. 电位双二次变化二维地电断面电阻率测深有限元数值模拟 [J]. *地球物理学报*, 45(02): 285-295, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2002.02.015
- 熊彬, 阮百尧, 罗延钟. 2003. 复杂地形条件下直流电阻率异常三维数值模拟研究 [J]. *地质与勘探*, 39(4): 60-64.
- 徐世浙. 1988. 点电源二维电场问题中付氏反变换的波数 k 的选择 [J]. *物探化探计算技术*, 10(3): 235-239.
- 徐世浙. 1994. 地球物理中的有限单元法 [M]. 北京: 科学出版社.
- 周熙襄, 钟本善. 1986. 电法勘探数值模拟技术 [M]. 成都: 四川科学技术出版社.

附中文参考文献

程志平. 2007. 电法勘探教程 [M]. 北京: 冶金工业出版社.