

文章编号: 1001-1749(2019)06-0745-10

## 2.5 维各向异性介质直流电法异常场的正演模拟

柯颂颂<sup>1,2</sup>, 宋 滔<sup>2</sup>, 刘 云<sup>2</sup>

(1. 中国科学院 地球化学研究所矿床地球化学国家重点实验室, 贵阳 550002;

2. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘 要:** 为了提高二维直流电阻率法的数值模拟精度, 这里实现了 2.5 维各向异性介质点源直流电场异常场的数值模拟。首先推导出 2.5 维各向异性介质总场和异常场满足的变分问题; 然后采用矩形内三角网格的方式进行单元剖分, 三角单元内二次场值和异常电阻率均设计为线性变化。为了简化背景场的计算, 将背景介质的电性主轴与观测坐标系的夹角设计为零, 从而避免了直接计算任意各向异性介质电位的傅里叶变换步骤。同时对计算中点源波数的选择和适用情况进行了讨论。最后通过对简单层状模型的计算, 与解析解进行对比, 验证了本数值算法的正确性和可靠性。比较常规各向同性介质模拟方式, 本数值模拟发现直流电阻率法对横向电阻率的变化更为明显。

**关键词:** 2.5 维各向异性; 直流电法; 异常场; 有限单元法; 正演模拟

**中图分类号:** P 631.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1001-1749.2019.06.07

### 0 引言

直流电阻率法各向同性的正反演技术已经比较成熟, 并且在工程、找矿等领域有了广泛应用<sup>[1-2]</sup>。随着数值模拟技术的发展, 研究的热点聚集到了更符合实际情况的连续介质和各向异性介质。

对连续介质的研究, 徐世浙<sup>[3]</sup>使用有限单元法矩形单元剖分; 阮百尧<sup>[4]</sup>使用三角单元剖分, 实现了对连续介质的数值模拟, 取得较高精度; 刘云<sup>[5]</sup>在阮百尧的基础上, 使用矩形内剖分四个三角形的剖分方式实现了对连续介质、复杂地形以及复杂模型的数值模拟。

近年来, 对各向异性直流电法的研究也越来越多<sup>[6-9]</sup>。但关于直流电阻率法 2.5 维各向异性正演模拟的研究相对较少。徐世浙等<sup>[3]</sup>使用有限单元法

对二维各向异性的直流电阻率法进行了模拟; Zhou 等<sup>[9]</sup>使用高斯正交网格 (Gaussian quadrature grids) 实现了对 2.5 维复杂各向异性介质的数值模拟, 取得较好的精度。由于三维各向异性参数太多, 导致基于三维各向异性正演的反演研究工作进展缓慢, 所以研究直流电阻率法 2.5 维的正反演方法成为探索各向异性反演工作的桥梁。在前人的研究中 2.5 维正演均是基于总场法的, 因为异常场法需要求解一次场, 而电性各向异性介质点源傅氏空间中的解析解较难求, 所以关于 2.5 维各向异性介质异常场法的研究较少。

这里给出各向异性介质 2.5 维总场和异常场的变分问题。在实现异常场法时, 因为将点源各向异性介质空间电位转换到傅里叶空间中具有一定困难, 所以笔者进行了简化处理, 假设点源附近的介质为主轴各向异性, 从而实现 2.5 维各向异性介质异

收稿日期: 2018-06-25

基金项目: 国家重点研发专项 (2016YFC0600505)

第一作者: 柯颂颂 (1992-), 男, 硕士, 研究方向大地电磁勘探, E-mail: 1227195172@qq.com。

通信作者: 宋滔 (1988-), 在站博士后, 研究方向地电场数值模拟, E-mail: songtao@mail.gyig.ac.cn。

常场法的模拟,通过算例证明该方法的正确性。

## 1 变分问题

一般定义各向异性电阻率为张量形式<sup>[11]</sup>,如式(1)所示。

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{D}\rho_0\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

选取如图 1 所示的观测坐标系,  $z$  方向为垂直方向,  $x$ 、 $y$  方向为水平方向,假设介质构造为  $x$  方向,即沿  $x$  方向介质没有变化,设介质电性主轴的平面  $x'y'$  与坐标轴  $xy$  平面的夹角为  $\alpha$ ,此时电阻率张量表达式(1)中旋转矩阵  $\mathbf{D}$  为:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)中得到介质的电阻率张量为:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{D}\rho_0\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} \rho_x & 0 & 0 \\ 0 & \rho_y \cos^2 \alpha + \rho_z \sin^2 \alpha & \frac{1}{2}(\rho_y - \rho_z) \sin 2\alpha \\ 0 & \frac{1}{2}(\rho_y - \rho_z) \sin 2\alpha & \rho_y \sin^2 \alpha + \rho_z \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (3)$$

相应的电导率为:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\sigma_0\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha & \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha & \sigma_y \sin^2 \alpha + \sigma_z \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \\ 0 & \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中: $\boldsymbol{\sigma}$  为电导率张量; $\sigma_0 = \text{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ;  $\sigma_x = \frac{1}{\rho_x}$ ;  $\sigma_y = \frac{1}{\rho_y}$ ;  $\sigma_z = \frac{1}{\rho_z}$ ,并记

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \quad (5)$$

根据 Zhou<sup>[9]</sup>、严波<sup>[11]</sup>等的推导,傅里叶空间中的电位  $U$  满足的边值问题如式(6)所示。

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) - k^2 \sigma_y U = -I \delta(A) & \in \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \in \Gamma_s \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -k \frac{K_1(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U & \in \Gamma_\infty \\ \frac{\partial U}{\partial z} = -k \frac{K_1(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{\lambda z}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U & \in \Gamma_\infty \end{cases} \quad (6)$$

对应的变分问题如式(7)所示。

$$\begin{cases} F(U) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) + \frac{1}{2} k^2 \sigma_y U^2 - I \delta(A) U \right] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\infty} k \sigma_y \frac{K_1(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U^2 d\Gamma \\ \delta F(U) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

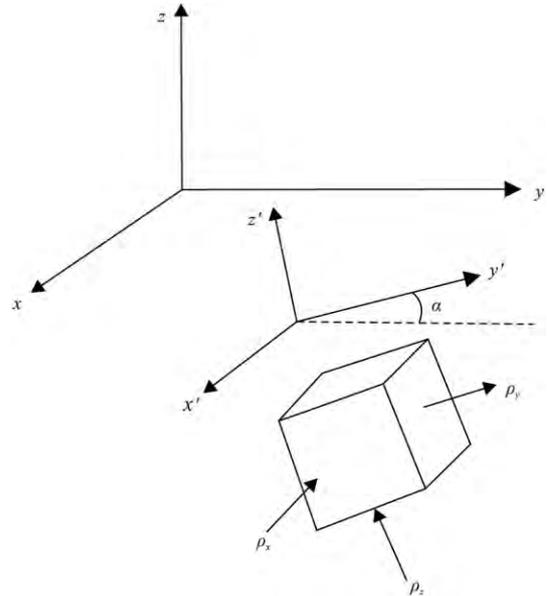


图 1 二维各向异性

Fig. 1 2-dimensional anisotropy

当采用异常场法模拟时,将总场分为背景场(一次场)和异常场(二次场),以消除源的影响,提高模拟精度。

与各向同性的边值问题和变分问题类似,我们给出异常场满足的变分问题如式(8)所示。

$$\begin{cases} F(U) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) + \frac{1}{2} k^2 \sigma_x U^2 + \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau}' \nabla U_0) + k^2 \sigma'_y U U_0 \right] d\Omega + \\ \int_{\Gamma_{\infty}} \frac{1}{2} k \sigma_y \beta U^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} k \sigma'_y \beta U U_0 d\Gamma \\ \delta F(U) = 0 \\ \beta = \frac{K_1(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $\sigma_y = \sigma_{y0} + \sigma'_y$ ;  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}'$ ;  $\sigma_{y0}$  和  $\boldsymbol{\tau}_0$  为背景电导率和背景电导率张量;  $\sigma'_y$  和  $\boldsymbol{\tau}'$  为异常电导率。

的线性组合如式(10)所示。

$$\begin{aligned} F(U) = & \sum_{\Omega} \int_e \left[ \frac{1}{2} (\nabla U) \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) \right] d\Omega + \\ & \sum_{\Omega} \int_e \left[ \frac{1}{2} k^2 \sigma_y U^2 \right] d\Omega + \\ & \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \left[ k \sigma_y \beta U^2 \right] d\Gamma + \\ & \sum_{\Omega} \int_e \left[ (\nabla U) \cdot (\boldsymbol{\tau}' \nabla U_0) \right] d\Omega + \\ & \sum_{\Omega} \int_e \left[ k^2 \sigma'_y U U_0 \right] d\Omega + \\ & \sum_{\Omega} \int_e \left[ k \sigma'_y \beta U U_0 \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

## 2 有限单元法

### 2.1 区域剖分

首先将整个区域剖分成矩形单元,然后再将每个矩形剖分成两个三角形,如图 2 所示。

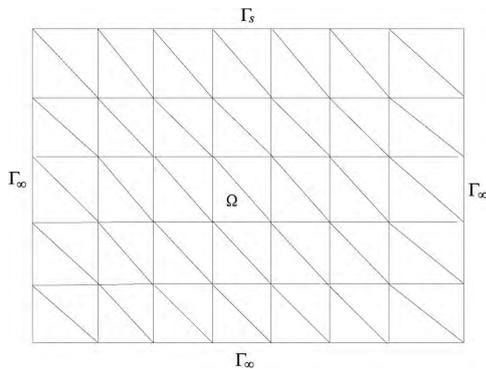


图 2 区域剖分

Fig. 2 Regional dissection

在三角单元内假设电位是线性变化的,在单元内任意位置的电位  $u$  可以通过形函数和三角形三个节点的电位表示,如式(9)所示。

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m = N^T u = u^T N \quad (9)$$

其中:  $N^T = (N_i, N_j, N_m)$  为形函数;  $u^T = (u_i, u_j, u_m)$  为三角形节点的电位。

$$\text{形函数为: } N_n = \frac{1}{2\Delta} (a_n x + b_n y + c_n) \quad n = i, j, m$$

其中:  $\Delta$  为三角形的面积,且有:

$$\begin{cases} a_i = y_j - y_m, b_i = x_m - x_j \\ a_j = y_m - y_i, b_j = x_i - x_m \\ a_m = y_i - y_j, b_m = x_j - x_i \\ \Delta = \frac{1}{2} (a_i b_j - a_j b_i) \end{cases}$$

### 2.2 单元分析

将式(8)中的积分在区域离散化,表示成所有单元

式(10)中的积分项依次记为积分 1、2、3、4、5 和 6。

根据严波<sup>[11]</sup>等的推导,以及积分 1 和积分 4 的相似性,得到:

$$\int_e \frac{1}{2} \left[ \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) \right] d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{1e} \mathbf{u}_e \quad (11)$$

$$\int_e \frac{1}{2} \left[ \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau}' \nabla U) \right] d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}'_{1e} \mathbf{u}_{0e} \quad (12)$$

其中:  $\mathbf{K}_{1e} = \frac{1}{4\Delta} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{K}'_{1e} = \frac{1}{4\Delta} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau}' \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E} =$

$$\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \end{bmatrix}^T$$

单元积分 2 和积分 5 为:

$$\int_e \left[ \frac{1}{2} k^2 \sigma_y U^2 \right] d\Omega = \frac{1}{2} k^2 \sigma_y \mathbf{u}_e^T \int_e N N^T d\Omega \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{2e} \mathbf{u}_e \quad (13)$$

$$\int_e \left[ \frac{1}{2} k^2 \sigma'_y U^2 \right] d\Omega = \frac{1}{2} k^2 \sigma'_y \mathbf{u}_e^T \int_e N N^T d\Omega \mathbf{u}_{0e} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}'_{2e} \mathbf{u}_{0e} \quad (14)$$

$$\text{其中: } \mathbf{K}_{2e} = \frac{\sigma_y k^2 \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}'_{2e} = \frac{\sigma'_y k^2 \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

单元积分 3 和积分 6 为:

$$\frac{1}{2} \int_e k_y \beta U^2 d\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{3e} \mathbf{u}_e \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \int_e k \sigma'_y \beta U U_0 d\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}'_{3e} \mathbf{u}_{0e} \quad (16)$$

$$\text{其中: } \mathbf{K}_{3e} = \frac{l}{6} k \sigma_y \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}'_{3e} = \frac{l}{6} k \sigma'_y \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

将单元矩阵添加到整体系数矩阵中的相应位置,得到式(17)。

$$\begin{aligned} F(U) &= \sum F_e(U) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T (\sum \mathbf{K}_{1e} + \\ &\sum \mathbf{K}_{2e} + \sum \mathbf{K}_{3e}) \mathbf{U} + \mathbf{U}^T (\sum \mathbf{K}'_{1e} + \\ &\sum \mathbf{K}'_{2e} + \sum \mathbf{K}'_{3e}) \mathbf{U}_0 = \\ &\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{K}' \mathbf{U}_0 \end{aligned} \quad (17)$$

令式(17)的变分为0,得到线性方程组(18)<sup>[3]</sup>。

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = -\mathbf{K}' \mathbf{U}_0 \quad (18)$$

解线性方程组得到波数域中异常场的电位,进行傅里叶反变换得到空间场中的异常场电位,最后加上一次场电位得到总场电位。

### 2.3 欧拉角的简化

观察式(17)和式(18),要得到方程组还需计算波数域中的一次场电位  $U_0$ ,点源均匀半空间各向异性介质电位表达式为式(19)<sup>[12]</sup>。

$$v = \frac{I |\rho|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{B}} \quad (19)$$

其中  $B = (r - r_0)^T \cdot \rho \cdot (r - r_0)$ ,将  $B$  展开后,直接使用该表达式进行傅里叶变换较为困难,因此笔者采用简化欧拉角的方法进行处理。假设二维构造下点源附近的介质(背景介质)电性主轴与观测坐标系的夹角为零得到:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{diag}(\rho_x, \rho_y, \rho_z) \\ B &= \frac{1}{\sqrt{\rho_x x^2 + \rho_y y^2 + \rho_z z^2}} \end{aligned} \quad (20)$$

对式(20)进行傅里叶变换,得到傅氏空间中电位表达式为式(21)。

$$U(k, y, z) = \frac{I |\rho|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \sqrt{\sigma_x} K_0(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2}) \quad (21)$$

得到波数域中的一次场后,代入有限元公式进行计算,将角度信息也作为异常来处理,由有限元完成计算异常场的工作。

此处我们假设了背景电阻率的电性主轴与观测坐标系的夹角  $\alpha$  为零,所以该方法对  $\alpha \neq 0$  的模型并不适合。

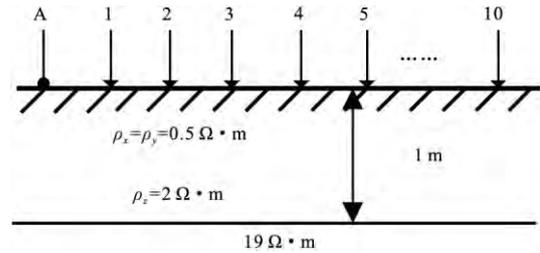


图3 模型1:两层含VTI介质模型

Fig. 3 Model 1: two layers with VTI media model

## 3 算例分析

### 3.1 两层含垂直各向异性(VTI)介质的地电模型

设计一个两层单界面模型,其中第一层为VTI介质,第二层为各向同性介质,模型和电极布置如图3所示。发射电极为A点,模拟供入1A的电流,1~10为接收电极且电极之间距离为1m。

#### 3.1.1 算法验证

分别使用总场法和异常场法进行模拟,选用的波数为徐世浙<sup>[3]</sup>计算的最优波数。异常场法中背景场设为  $\rho_x = \rho_y = 0.5 \Omega \cdot \text{m}$ ,  $\rho_z = 2.0 \Omega \cdot \text{m}$  产生的电场,也即点源处的电阻率作为背景电阻率。将总场法与异常场法的数值模拟结果与解析解分别进行对比,如表1所示。

从模拟结果可以看出,使用异常场法精度较高,误差均在1%以内,而总场法在点源附近误差较大,并且整体的误差也较异常场法较高,也证明了本文算法的正确性和准确性。

#### 3.1.2 波数的讨论

在以上计算中,如果采用宋滔等<sup>[14]</sup>计算的7点波数,总场法和异常场法的计算结果分别与解析解对比,相对误差如表2所示。

从结果中可以看出,异常场法模拟的结果误差非常小,但是总场法采用7点波数的模拟结果与解析解的相对误差较大。这是因为在波数域中点源附近有限元解误差较大,所以变换到空间域时误差也较大;7点波数本来的精度是较高的,即如果有限元解越精确,得到空间域的电位也越准确,相反如果解的误差较大,使用七点波数反而会使空间域的电位误差变大。

因为在地形条件下无法使用异常场法,所以在各向异性的正演模拟中用总场法时采用5点波数;采用异常场法时选用7点波数,可以取得相对更高的精度。

表 1 数值解与解析解对比

Tab. 1 The comparison of numerical solution and analytical

测点位置	解析解/V	总场法/V	相对误差/%	异常场法/V	相对误差/%
1	0.3399	0.3510	3.2737	0.3378	0.6120
2	0.2538	0.2600	2.4406	0.2536	0.0827
3	0.2189	0.2204	0.7066	0.2193	0.2010
4	0.1968	0.1977	0.4289	0.1973	0.2388
5	0.1805	0.1802	0.2028	0.1810	0.2603
6	0.1676	0.1668	0.4738	0.1681	0.3043
7	0.1569	0.1560	0.5653	0.1573	0.2549
8	0.1478	0.1469	0.5956	0.1483	0.3179
9	0.1400	0.1391	0.6227	0.1405	0.3643
10	0.1331	0.1322	0.6636	0.1335	0.2930

表 2 采用 7 点波数的模拟结果对比

Tab. 2 The numerical solution with 7 wave numbers

测点位置	解析解/V	总场法/V	相对误差/%	异常场法/V	相对误差/%
1	0.3399	0.3272	3.7329	0.3405	0.1967
2	0.2538	0.2582	1.7157	0.2537	0.0396
3	0.2189	0.2204	0.7091	0.2187	0.0524
4	0.1968	0.1983	0.7421	0.1970	0.0689
5	0.1805	0.1820	0.8264	0.1806	0.0612
6	0.1676	0.1690	0.8616	0.1678	0.0992
7	0.1569	0.1583	0.8802	0.1570	0.0655
8	0.1478	0.1492	0.9110	0.1479	0.0459
9	0.1400	0.1413	0.9382	0.1401	0.0459
10	0.1331	0.1344	0.9512	0.1332	0.0656

表 3 TTI 介质模拟结果对比

Tab. 3 The solution of TTI model

Y	解析解/V	总场法/V	相对误差/%	异常场法/V	相对误差/%
1	0.1203	0.1207	0.3629	0.1961	63.0121
2	0.0602	0.0617	2.5711	0.0751	24.9018
3	0.0401	0.0405	0.9615	0.0477	19.0275
4	0.0301	0.0302	0.3022	0.0350	16.2567
5	0.0241	0.0241	0.0359	0.0273	13.5085
6	0.0201	0.0200	0.2798	0.0223	11.1571
7	0.0172	0.0171	0.4665	0.0188	9.3667
8	0.0150	0.0149	0.6097	0.0163	8.0696
9	0.0134	0.0133	0.7253	0.0143	7.1383
10	0.0120	0.0119	0.8273	0.0128	6.4559

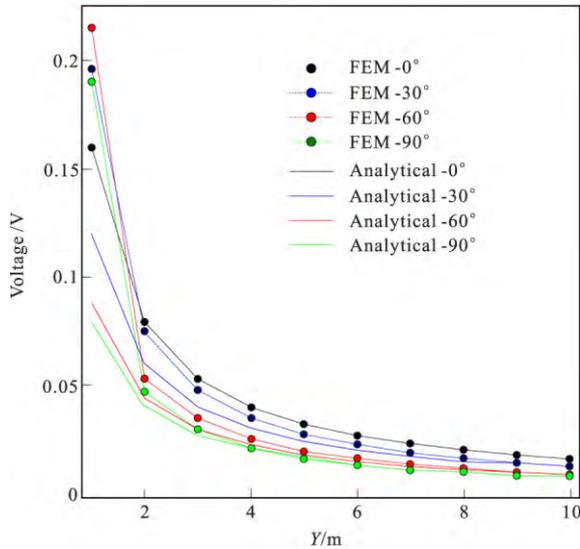


图4 解析解与异常场法数值解曲线

Fig. 4 The curves of analytical solutions and abnormal potential solutions

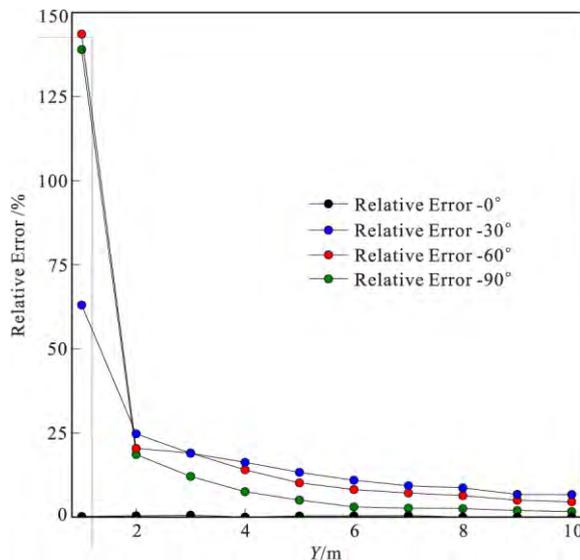


图5 解析解与异常场法数值解相对误差

Fig. 5 Relative error of analytic solutions and abnormal potential solutions

### 3.1.3 背景电阻率的取值

采用异常场法简化欧拉角时,假设点源附近的介质与选定坐标系的夹角为零,通过模型来计算当点源处介质为 TTI 时异常场的结果。

假设均匀半空间,电阻率为  $\rho_x = \rho_y = 0.5 \Omega \cdot m$ ,  $\rho_z = 2.0 \Omega \cdot m$ ,采用异常场法模拟  $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  的结果,与解析解进行对比验证文中的假设;设置电极距离点源  $1 m \sim 10 m$  且电极距为  $1$

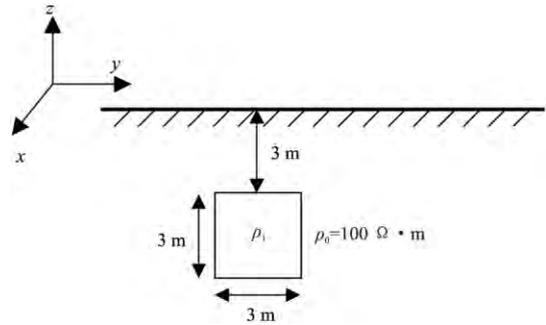


图6 含异常体模型

Fig. 6 Model with abnormal body

$m$ , 10 个测量点。

表 3 给出了  $\alpha = 30^\circ$  时,总场法与异常场法的解,以及它们与解析解的相对误差,从表 3 中可以看出,总场法在临近点源的第二个点的误差较大,达到了 2.571 1 %,在其他测点处的误差均在 1% 以内;但异常场法的解误差均较大,在源附近已经达到了 63.012 1 %。因为此时背景电阻率的电性主轴与坐标系有  $\alpha = 30^\circ$  的夹角,不满足文中关于欧拉角的假设,所以此处采用异常场法处理的结果不准确。

设  $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ,解析解与异常场法求解结果的曲线见图 4,以及相对误差的曲线见图 5。

从以上模拟可以发现点源处的介质如果为 TTI 介质(背景介质),只能采用总场法进行正演,文中给出的异常场法不再适用。

### 3.2 含异常体模型

设计如图 6 所示的含异常体模型,异常体距离地面  $3 m$ ,大小为  $3 m \times 3 m$ ,背景介质为各向同性介质电阻率为  $\rho_0 = 100 \Omega \cdot m$ ,在地表进行测量设置 40 个电极,异常体位于测量区域的中心部分。

设置三个模型,mod1 异常体为各向同性电阻率为  $\rho = 10 \Omega \cdot m$ ,mod1 异常体为各向异性电阻率为  $\rho_x = \rho_y = 10 \Omega \cdot m, \rho_z = 100 \Omega \cdot m$ ,mod3 异常体为各向异性,电阻率为  $\rho_x = \rho_y = 100 \Omega \cdot m, \rho_z = 10 \Omega \cdot m$ 。

模拟对称四极装置的响应,取极距  $AB$  为  $3 m, 7 m, 11 m$  和  $21 m$  的视电阻率曲线进行对比,结果如图 7 所示。

图 7 中 MD-10、MD-10-100、MD-100-10 分别代表 mod1、mod2 和 mod3。

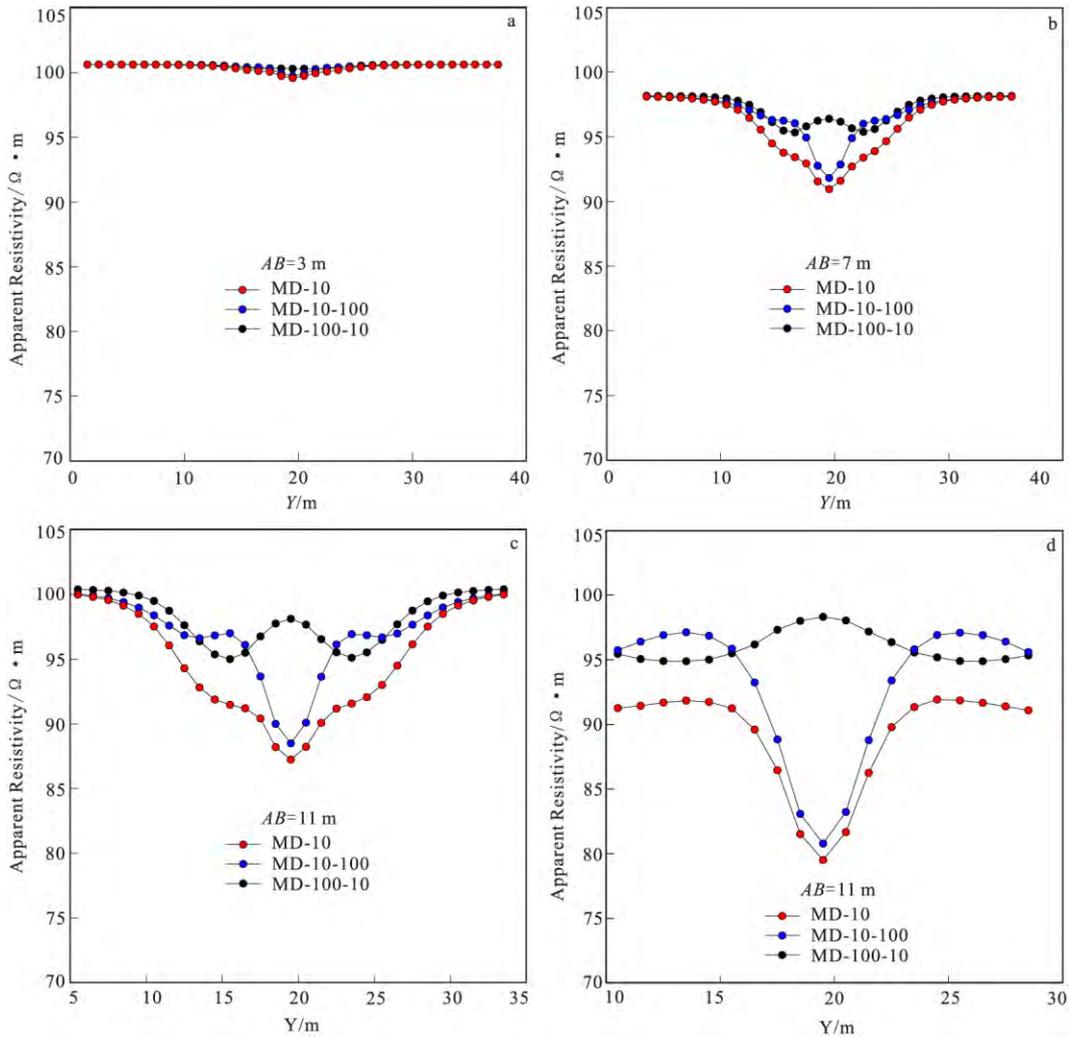


图 7 含低阻异常体模型极距为 3 m、7 m、11 m 和 21 m 模拟结果曲线图

Fig. 7 The polar distance of anomalous body models with low resistivity is 3 m, 7 m, 11 m and 21 m

(a)AB=3 m; (b)AB=7 m; (c)AB=11 m; (d)AB=21 m

从图 7 可以清晰得看出,当极距较小时,对称四极法反映的是较浅介质的电性,所以三个模型的结果相近,均接近  $100 \Omega \cdot m$ ,当极距变大时,受到不同异常体的影响,三个模型的视电阻率曲线出现分离。图 7 中 mod3 在四个不同的极距下,视电阻率的值均与背景电阻率较为接近,为  $100 \Omega \cdot m$ ,其异常体的横向电阻率为  $100 \Omega \cdot m$ ,纵向电阻率为  $10 \Omega \cdot m$ ,而 mod2 模型的模拟结果与异常体为各向同性的模拟结果较为接近。对称四极装置、偶极偶极装置以及二极装置的响应,如图 8、图 9 和图 10 所示。

通过以上模拟,发现介质横向电阻率的变化对测量的结果影响较大,而纵向电阻率对结果影响相

对较小。二极和偶极偶极装置相较于三极和对称四极装置,对纵向电阻率的反映更加灵敏,并且对异常的位置和形态反映也更加准确,其中偶极偶极装置对纵向电阻率的变化最为灵敏。

#### 4 结论

我们给出了点源 2.5 维各向异性异常场法的边值问题和变分问题,并用有限元实现正演模拟。使用异常场法求解时,假设点源附近的介质为 VTI 介质,简化空间电位解析解的欧拉角,使得异常场法可以进行。

通过算例分析,表明异常场法的精度更高。在

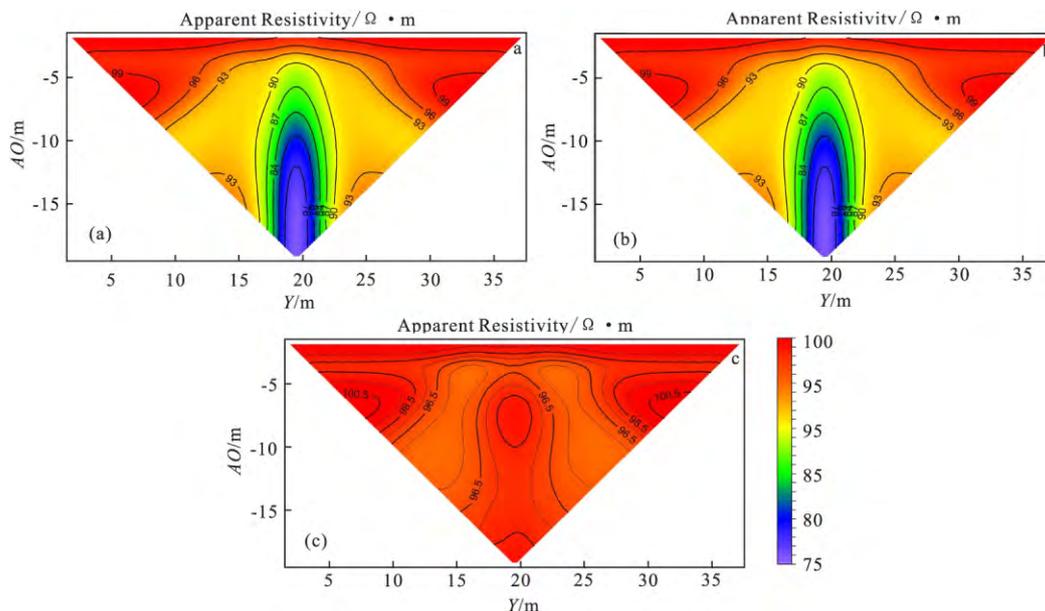


图 8 对称四极装置视电阻率剖面

Fig. 8 Apparent resistivity profile of symmetrical quadrupole device  
(a) mod1; (b) mod2; (c) mod3

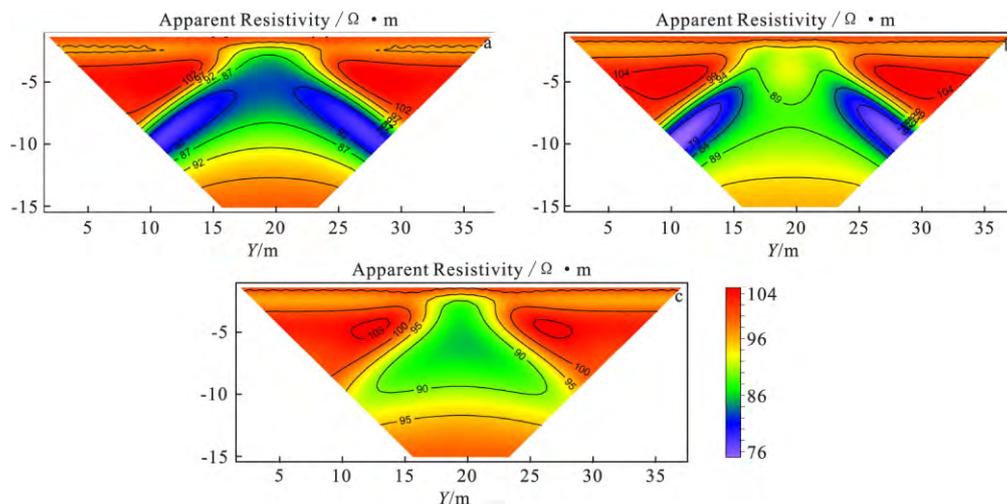


图 9 偶极偶极装置视电阻率剖面

Fig. 9 Apparent resistivity profile of dipole dipole device  
(a) mod1; (b) mod2; (c) mod3

模拟计算中,建议地形模型采用 5 点波数使用总场法,平地形模型使用异常场法 7 点波数,可以获得更高的精度。

因为使用异常场法时,假设点源附近的介质为 VTI 介质,所以文中所提出的简化方法并不适合点源附近的介质为 TTI 的情况,即介质的电性主轴与观测坐标夹角不为 0 时,该方法并不适合。

通过模拟,发现对于二维介质,直流电阻率法对

横向电阻率的变化更为灵敏,而纵向电阻率对结果影响相对较小。

参考文献:

- [1] 程志平. 电法勘探教程[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2007.  
CHENG Z P. Course of electric exploration [M]. Beijing: Metallurgical industry press, 2007. (In Chinese)

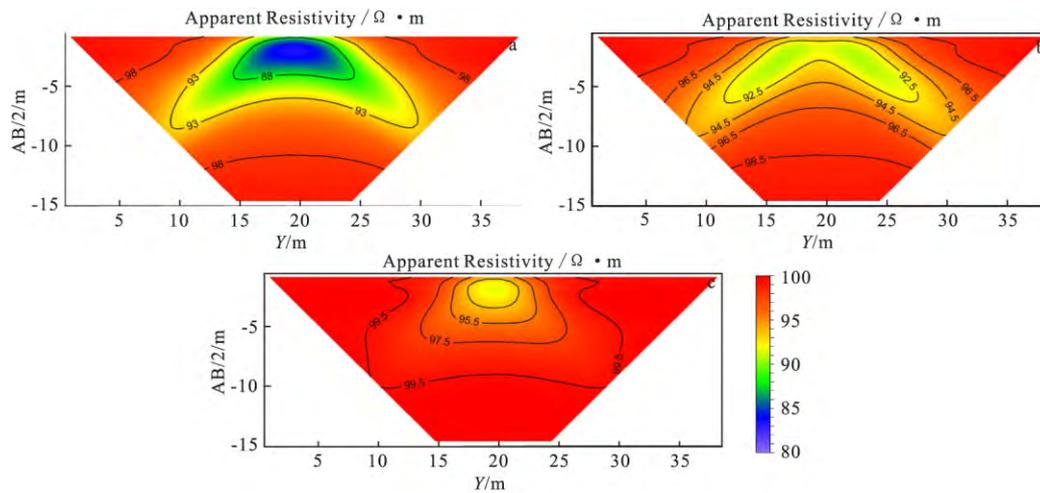


图 10 二极装置视电阻率剖面

Fig. 10 Apparent resistivity profile of dipole device  
(a) mod1; (b) mod2; (c) mod3

- [2] 李金铭. 地电场与电法勘探[M]. 北京: 地质出版社, 2005.
- LI J M. Geoelectric field and electrical prospecting [M]. Beijing: Geology Press, 2005. (In Chinese)
- [3] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- XU S Z. FEM in Geophysics [M]. Beijing: Science Press, 1994. (In Chinese)
- [4] 阮百尧, 村上裕, 徐世浙. 激发极化数据的最小二乘二维反演方法[J]. 地球科学, 1999(06): 619-624.
- RUAN B R, YUTAKAB MURAKAMI, XU S Z. Least square 2-D inversion method for induced polarization data [J]. Earth Science, 1999(06): 619-624. (In Chinese)
- [5] 刘云, 宋滔, 王赞. 电导率连续变化 2.5 维直流电阻率法有限元数值模拟[J]. 地球物理学进展, 2014 (03): 1194-1200.
- LIU Y, SONG T, WANG Y. 2.5-D numerical modeling on DC resistivity by FEM with continuous variation of conductivity [J]. Progress in Geophysics, 2014 (03): 1194-1200. (In Chinese)
- [6] LI Y, K SPITZER. Finite element resistivity modelling for three-dimensional structures with arbitrary anisotropy [J]. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 2005, 150(1-3): 15-27.
- [7] WANG W, WU X, K. SPITZER. Three-dimensional DC anisotropic resistivity modelling using finite elements on unstructured grids [J]. Geophysical Journal International, 2013, 193(2): 734-746.
- [8] WIESE T. Resistivity inversion in 2-D anisotropic media: numerical experiments [J]. Geophysical Journal International, 2015, 201(1): 247-266.
- [9] ZHOU B, M GREENHALGH, S A GREENHALGH. 2.5-D/3-D resistivity modelling in anisotropic media using Gaussian quadrature grids [J]. Geophysical Journal International, 2009, 176(1): 63-80.
- [10] YIN C. Geoelectrical inversion for a one-dimensional anisotropic model and inherent non-uniqueness [J]. Geophysical Journal International, 2000, 140(1): 11-23.
- [11] 严波. 2.5 维直流电阻率自适应有限元数值模拟[D]. 青岛: 中国海洋大学, 2013.
- YAN B. 2.5D DC resistivity numerical modeling by the adaptive finite-element method [D]. Qingdao: Ocean University of China, 2013. (In Chinese)
- [12] LI P, N F UREN. Analytical solution for the point source potential in an anisotropic 3-D half-space I; Two-horizontal-layer case [J]. Mathematical and Computer Modelling, 1997, 26(5): 9-27.
- [13] 宋滔, 王绪本. 点源二维电场正演的一组新的波数[J].

地球物理学进展, 2014(1): 166—171.

SONG T, WANG X B. A set of new wave number for point source and 2-D electric filed problems [J]. Pro-

gress in Geophysics, 2014(1): 166—171. (In Chinese).

## Forward modeling of anomalous field in 2.5D anisotropic medium by DC resistivity method

KE Songsong<sup>1,2</sup>, SONG Tao<sup>2</sup>, LIU Yun<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Ore Deposit Geochemistry, Institute of Geochemistry  
Chinese Academy of Sciences, Guiyang 550002, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** In order to improve the numerical simulation accuracy of the two-dimensional DC resistivity method, the simulation of electric field anomaly field for 2.5-dimensional anisotropic point source DC is carried out in this paper. First, the variational problem of the total field and abnormal field of 2.5 dimensional anisotropic medium is derived. Then, the element is divided by a rectangular triangular mesh, and the two field values and the abnormal resistivity are designed as linear changes in the triangular element. In order to simplify the calculation of the background field, the angle between the electrical principal axis of the background medium and the observed coordinate system is designed to be zero, thus avoiding the Fourier transform directly calculating the potential of arbitrary anisotropic medium. At the same time, the selection and application of the point source wavenumbers in the calculation are discussed. Finally, the validity and reliability of the numerical algorithm are verified by comparing with the analytical solution of the simple layered model. Comparing with the conventional isotropic medium simulation method, it is found that the change of lateral resistivity by DC resistivity method is more obvious.

**Keywords:** 2.5-D anisotropy; DC resistivity method; anomalous field; finite-element method; forward modeling